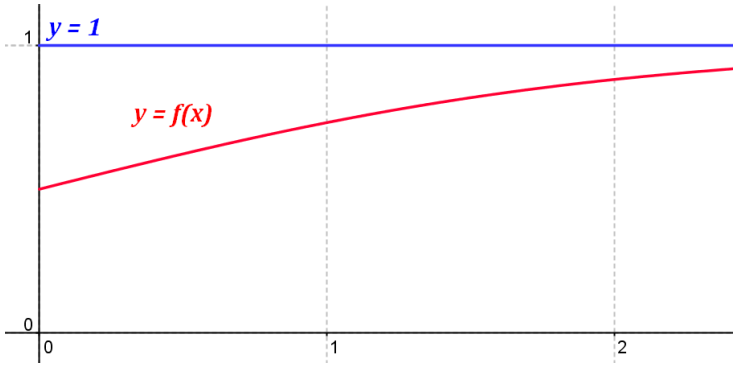
EXERCICE N°1 : 20' 4 points

Soit f la fonction définie sur IR_+ par $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$ et représentée dans le repère ci-dessous.



1°) Déterminer une primitive de f sur IR_+.

2°) Soit la suite (u_n) définie pour $n>0$ par $u_n=\int_{\ln n}^{\ln(n+1)} f(x)dx$

a) Calculer u_1 et u_2. Exprimer u_n en fonction de n.

b) Que représente graphiquement le nombre u_n ?

3°) Montrer que (u_n) est une suite décroissante positive.

Calculer la limite de cette suite.

4°) On pose $S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$.

a) Calculer S_1, S_2, S_3 et exprimer S_n en fonction de n.

b) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

EXERCICE N°2 : 20' 4 points

1°) Soit f la fonction définie sur IR par $f(x)=\dfrac{e^{1,15x}}{99+e^{1,15x}}$.

a) Démontrer que $f(x)=\dfrac{1}{1+99e^{-1,15x}}$.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

c) Etudier les variations de la fonction f.

2°) Une ville compte 10000 habitants. A huit heures du matin **100** personnes apprennent une nouvelle par la radio locale, on note $f(t)$ la fréquence des personnes connaissant la nouvelle à l'instant t (en heure)

on choisit 8h du matin comme instant initiale $t=0$ ainsi $f(0)=\dfrac{100}{10000}=0,01$. La nouvelle se répand en ville de sorte que la vitesse de propagation $f'(t)$ vérifie $f'(t)=1,15f(t)\left[1-f(t)\right]$.

On considère, sur l'intervalle $[0,+\infty[$, la fonction h définie par $h(t)=\dfrac{1}{f(t)}$.

a) Montrer que h est une solution de l'équation différentielle (E) $y'=-1,15y+1,15$

b) Résoudre l'équation (E),en déduire que $f(x)=\dfrac{1}{1+99e^{-1,15x}}$.

Déterminer à partir de quelle heure (à une unité prés) **99%** de la population de cette ville connaîtra la nouvelle.

EXERCICE N°3 :	**20'**	**5 points**	

Deux éleveurs produisent une race de poissons d'ornement qui ne prennent leur couleur définitive qu'à l'âge de trois mois :

• Pour les alevins du premier élevage, entre l'âge de deux moins et l'âge de trois mois, 10% n'ont pas survécu, 75% deviennent rouges et les 15% restant deviennent gris.

• Pour les alevins du deuxième élevage, entre l'âge de deux moins et l'âge de trois mois, 5% n'ont pas survécu, 65% deviennent rouges et les 30% restant deviennent gris.

Une animalerie achète les alevins, à l'âge de deux mois : 60% au premier éleveur, 40% au second.

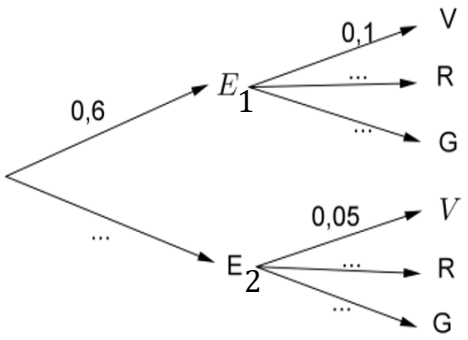
1°) Un enfant achète un poisson le lendemain de son arrivée à l'animalerie, c'est-à-dire à l'âge de deux mois.

On définit les évènements suivants :

E_1 : « le poisson provient du premier élevage » ; **E_2** : « le poisson provient du deuxième élevage » ;

$\overline{V}$: « le poisson est toujours vivant à trois mois » ; R : « le poisson est rouge à l'âge de trois mois » ;

G : « le poisson est gris à l'âge de trois mois ».



a) Compléter l'arbre de probabilités Modélisant la situation.

b) Calculer la probabilité $p(V)$, en déduire que $p(\overline{V})=0,92$.

c) Déterminer la probabilité qu'un mois plus tard le poisson soit rouge.

d) Sachant que le poisson est gris à l'âge de trois mois, quelle est la probabilité qu'il provienne du premier élevage ?

2°) Une personne choisit au hasard et de façon indépendante 5 alevins de deux mois. Quelle est la probabilité qu'un mois plus tard, seulement trois soient en vie ? on donnera une valeur approchée à 10^{-2} prés.

3°) L'animalerie décide de garder les alevins jusqu'à l'âge de trois mois, afin qu'ils soient vendus avec leur couleur définitive. Elle gagne **1 Dinars** si le poisson est rouge **0,250 Dinars** s'il est gris et perd **0,100 Dinars** s'il ne survit pas .

Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique de l'animalerie par poisson acheté.

Déterminer la loi de probabilité de X et son espérance mathématique, arrondie au centième.

EXERCICE N°4 : | 30' | 5 points

On considère la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=e^{-\sqrt{x}}$ et sa courbe représentative(C) dans un plan rapporté à un repère orthonormé.$\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1°) Étudier la dérivabilité de *f* à droite en 0. Interpréter géométriquement le résultat obtenu.

2°) a) Dresser le tableau de variation *f*.

b) Montrer que *f* est une bijection de [0 ;+∞ [sur un intervalle que l'on précisera.

c) Montrer que l'équation $f(x)=\frac{1}{2}$ admet dans $[0,+\infty[$ une solution unique α, et que α ∈]0 ;1[.

3°) On notera f^{-1} la fonction réciproque de *f* et (C') sa courbe représentative dans un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

a) Tracer les courbes (C) de f et (C') de f^{-1} dans le même repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

b) Expliciter f^{-1}.

4°) a) Soit $I=\int_0^1 e^{-\sqrt{t}}\,dt$. Interpréter graphiquement *I*.

b) Résoudre $f^{-1}(x)=1$.

c) Calculer $I'=\int_{e^{-1}}^1 f^{-1}(t)\,dt$. En déduire *I*.

EXERCICE N°5 : | 30' | 5 points

1°) On donne les nombres complexes suivants :

$$a=\left(1+\sqrt{3}\right)i \;;\; b=-\left[\left(1+\sqrt{3}\right)+\left(1-\sqrt{3}\right)i\right] \text{ et } w=2+\left(1-\sqrt{3}\right)i\,.$$

a) Donner la forme algébrique de a^2 et w^2.

b) Vérifier que $w^2=a^2-4b$.

2°) On considère les équations suivantes : $\left(E_1\right): z^2-az+b=0$ et $\left(E_2\right): z^3-2az^2+\left(b+a^2\right)z-ab=0$.

a) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $\left(E_1\right)$ (on note z_1 et z_2 les solution de $\left(E_1\right)$ tel que $|z_1|<|z_2|$).

b) Vérifier que *a* est une solution de l'équation $\left(E_2\right)$.

c) En déduire les solutions de $\left(E_2\right)$.

3°) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$, on considère les points *A*, *B*, *C* et *D*.

d'affixes respectives $z_A=1+i$, $z_B=-1+i\sqrt{3}$, *w* et *a* .

a) Donner sous forme exponentielle z_B puis placer *A* et *B*.

b) Vérifier que $z_A-z_B=w$. Construire alors le point *C*.

c) Donner la forme algébrique de $\frac{w-z_A}{a-z_A}$.

En déduire une *A*, *C* et *D* sont alignés.

d) Construire alors le point

Tél : +216 29 862 229 / +216 29 862 464 - Email : contact@takiacademy.com